# مقدمه‌ای بسیار کوتاه بر آنالیز غیراستاندارد و اعداد ابرحقیقی

فاروق کریمی زاده
fkz@riseup.net

۱۳ تیر ۱۳۹۹

## فهرست مطالب

# ۱ آنالیز غیراستاندارد چیست؟

آنالیز غیراستاندارد شاخه‌ای از ریاضیات است و برخلاف آنالیز استاندارد که با تعاریف اپسیلون-دلتا ساخته شده،با استفاده از اعداد بی‌نهایت کوچک پیش میرود.کورت گودل در مورد آنالیز غیراستاندارد گفته:

> دلایل خوبی وجود دارد که باور کنیم نسخه‌ای از آنالیز غیراستاندارد،آنالیز آینده خواهد بود.

# ۲ اندکی تاریخچه

شاید اولین بار در سال ۱۶۲۹ میلادی فرما جهت محاسبه مشتق چند جمله‌ای‌ها اقدام به استفاده از بی‌نهایت کوچک‌ها،اعدادی بی‌نهایت کوچک،نمود.برای مثال جهت محاسبه شیب خط مماس در نقطه $x$ او با در نظر گرفتن عددی بسیار کوچک مانند $E$ و دو نقطه‌ی $(x, f(x))$ و $(x+E, f(x+E))$ ، محاسبه تغییرات مقدار تابع بر تغییرات ورودی تابع(تغییرات $y$ ها بر تغییرات $x$ ها) و حذف $E$ شیب خط را بدست می‌آورد:

$$f(x) = x^2$$
$$m = \frac{f(x+E) - f(x)}{x+E-x} = \frac{(x+E)^2 - x^2}{E} = \frac{x^2 + E^2 + 2xE - x^2}{E} = \frac{E^2 + 2xE}{E} = 2x + E = 2x$$

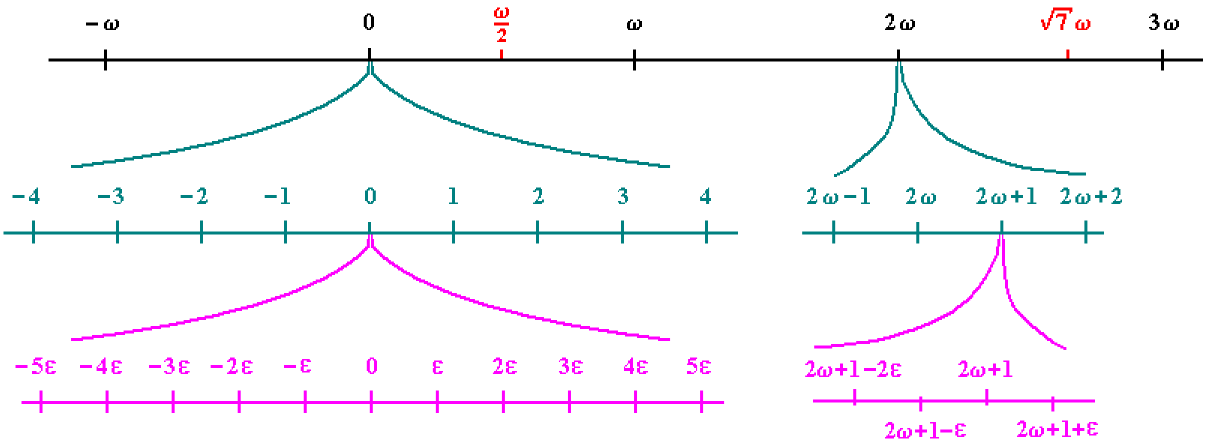
نیوتن و لایپنیتس دو بنیانگذار حسابان بی‌نهایت کوچک‌ها نیز کار های مشابهی برای محاسبه مشتق انجام می‌دادند.حدود سال ۱۸۷۲ بی‌نهایت کوچک‌ها از جریان ریاضیات حذف شدند و تعریف اپسیلون-دلتا از حد جای آنها را گرفت.مشتق و انتگرال با این تعریف ساخته شدند و بی‌نهایت کوچک‌ها رسما کنار گذاشته شدند تا اواخر قرن بیستم که آبراهام رابینسون اثر خود را با نام «آنالیز غیراستاندارد» منتشر کرد.او ثابت کرد که اعداد ابرحقیقی منطقا سازگار هستند اگر و تنها اگر اعداد حقیقی همینطور باشند. البته اینکار ها منتقدانی داشته‌اند و دارند و این موضوع که بین آنالیز استاندارد و غیر استاندارد،کدام بهتر است، موضوع مورد مناقشه بین ریاضی‌دانان است.

# ۳ اعداد ابرحقیقی

قبل از ادامه دو قانون مهم را یادآوری می‌کنم: اول اینکه تقسیم بر صفر به هیچ وجه قانونی نیست و دوم اینکه هر عدد حقیقی مثبت دو ریشه دارد و ریشه بزرگ‌تر را با $\sqrt{c}$ نشان می‌دهیم.ریشه اعداد حقیقی منفی تعریف نشده است.یک عدد مانند $\epsilon$ بی‌نهایت کوچک است اگر برای هر عدد حقیقی مثل $a$ داشته باشیم:

$$-a < \epsilon < a$$

با این تعریف تنها عدد حقیقی بی‌نهایت کوچک صفر می‌باشد.در سیستم اعداد ابرحقیقی اعداد بی‌نهایت کوچکی وجود دارند که صفر نیستند.همانطور که اعداد حقیقی را می‌توانیم از اعداد گویا بسازیم،اعداد ابرحقیقی را نیز میتوان از اعداد حقیقی ساخت.اینجا بیشتر به بررسی خواصی از اعداد ابرحقیقی که مربوط به حسابان هستند می‌پردازیم.
مجموعه تمام اعداد ابرحقیقی را با نماد $*R$ یا $R*$ نمایش می‌دهیم.این مجموعه ابرمجموعه اعداد حقیقی است.یعنی هر عدد حقیقی اجبارا یک عدد ابرحقیقی نیز می‌باشد.اما این مجموعه شامل عضوهای دیگری نیز است.بی‌نهایت کوچک‌ها در مجموعه اعداد ابرحقیقی ۳ دسته هستند: یا صفر هستند،یا بی‌نهایت کوچک مثبت یا بی‌نهایت کوچک منفی.از حروف اپسیلون($\epsilon$) و دلتا($\delta$) جهت نمایش بی‌نهایت کوچک‌ها استفاده می‌کنیم.اگر $a$ و $b$ دو عدد ابرحقیقی باشند و $a-b$ یک بی‌نهایت کوچک باشد،می‌گوییم این دو عدد به هم بی‌نهایت نزدیک هستند.اگر $\epsilon$ یک بی‌نهایت کوچک مثبت باشد آنگاه $-\epsilon$ یک بی‌نهایت کوچک منفی و $-\frac{1}{\epsilon}$ یک بی‌نهایت منفی،عددی کوچکتر از هر عدد حقیقی منفی،است.
از این به بعد منظور از عدد متناهی هر عدد غیر بینهایت در دستگاه ابرحقیقی است.شکل زیر محور اعداد ابرحقیقی به همراه اعداد حقیقی،بی‌نهایت کوچک‌ها و بی‌نهایت‌ها است.




## ۱.۳ اصول

کل حسابانی که در آینده کمی به آن می‌پردازیم بر اساس سه اصل ساخته شده است: اصل انتقال،اصل توسعه و اصل قسمت استاندارد.

### ۱.۱.۳ اصل توسعه

(الف) اعداد حقیقی زیرمجموعه‌ای از اعداد ابرحقیقی هستند و رابطه‌ی ترتیب $x < y$ برای اعداد حقیقی زیرمجموعه‌ای از رابطه ترتیب برای اعداد ابرحقیقی است.
(ب) یک عدد ابرحقیقی بزرگ‌تر از صفر اما کوچکتر از هر عدد حقیقی مثبت وجود دارد.
(ج) برای هر تابع حقیقی مانند $f$ با یک یا تعداد بیشتری متغیر یک تابع ابرحقیقی به اسم $f^*$ با همین تعداد متغیر وجود دارد.$f^*$ را توسعه‌ی طبیعی $f$ می‌نامیم.

قسمت (الف) به زبان ساده می‌گوید محور اعداد حقیقی قسمتی از محور اعداد ابرحقیقی است.برای توضیح قسمت (ب) باید اول بفهمیم یک بی‌نهایت کوچک دقیقاً چیست:

یک عدد مانند $\epsilon$:
**بی‌نهایت کوچک مثبت** است اگر مثبت اما از هر عدد حقیقی مثبت کوچک‌تر باشد.
**بی‌نهایت کوچک منفی** است اگر منفی اما از هر عدد حقیقی منفی بزرگ‌تر باشد.
**بی‌نهایت کوچک** است اگر یک بی‌نهایت کوچک مثبت یا منفی یا عدد صفر باشد.

با این تعاریف قسمت (ب) می‌گوید حداقل یک بی‌نهایت کوچک مثبت وجود دارد.بعدا خواهیم دید که بی‌شمار بی‌نهایت کوچک وجود دارد.یک بی‌نهایت کوچک مثبت عددی ابرحقیقی است که نمی‌تواند حقیقی باشد.پس قسمت (ب) مطمئنمان می‌کند که اعدادی ابرحقیقی که حقیقی نیستند وجود دارند.
قسمت (ج) اصل توسعه به ما اجازه می‌دهد از توابع حقیقی برای اعداد ابرحقیقی استفاده کنیم.از آنجا که تابع جمع یک تابع حقیقی دو متغیره است،توسعه‌ی طبیعی آن یعنی $+^*$ نیز یک تابع دو متغیره برای دو عدد ابرحقیقی می‌باشد.برای سادگی کار ستاره‌ها را کنار می‌گزاریم و به جای $y +^* x$ می‌نویسیم $x + y$.این قسمت از اصل توسعه همچنین به ما اجازه می‌دهد از عباراتی مانند $sin^2(x) + cos^2(y)$ برای $x$ و $y$ ابرحقیقی استفاده کنیم.

### ۲.۱.۳ اصل انتقال

هر عبارت در مجموعه اعداد حقیقی که برای یک یا تعداد بیشتری تابع حقیقی برقرار است،برای توسعه‌ی طبیعی این توابع نیز برقرار است.

چند مثال برای درک بهتر اصل انتقال:

۱. عملگر جمع بسته است: برای هر $x$ و $y$ همیشه $x + y$ را تعریف شده داریم.

۲. اتحادها برقرار هستند مثلا: $(x+y)^2 = x^2 + y^2 + 2xy$

۳. تقسیم بر صفر ممنوع و $\frac{x}{0}$ تعریف نشده است.

در هر مثال برای یک یا دو عدد حقیقی عبارت ارزش درستی دارد.اصل انتقال به ما می‌گوید حتی برای دو عدد ابرحقیقی نیز این عبارات ارزش درستی دارند و مثلاً حتی برای یک x ابرحقیقی هم تقسیم بر صفر تعریف نشده است.بنابر اصل انتقال،یک تابع حقیقی و توسعه‌ی طبیعی آن هر دو یک مقدار را برای یک مقدار واحد حقیقی در ورودی برمی‌گردانند.به همین دلیل است که می‌توانیم ستاره‌ها را حذف کنیم.
قبلاً به اعداد متناهی و بی‌نهایت‌ها اشاره کردم.حال با تعاریف زیر دقیق‌تر به این دو می‌پردازیم:

یک عدد ابرحقیقی:
**متناهی** است اگر بین دو عدد حقیقی باشد.
**بی‌نهایت یا نامتناهی مثبت** است اگر بزرگ‌تر از هر عدد حقیقی باشد.
**بی‌نهایت یا نامتناهی منفی** است اگر کوچک‌تر از هر عدد حقیقی باشد.

**قوانین برای اعداد بی‌نهایت کوچک،متناهی و بی‌نهایت** توجه کنید که یک بی‌نهایت کوچک،متناهی است.قبل از اینکه به یک فهرست از قوانین بپردازیم،بیاید دقیق‌تر به دوتا از آن‌ها نگاه کنیم.اگر $\epsilon$ یک بی‌نهایت کوچک و $a$ یک عدد متناهی باشد،آنگاه حاصل ضرب این دو یک بی‌نهایت کوچک است.برهان:

$$\forall r \in R : 0 < \epsilon < r$$
$$\forall r \in R : 0 \cdot a < \epsilon \cdot a < a \cdot r$$
$$\forall r' \in R : 0 < \epsilon \cdot a < r'$$

همچنین اگر $\epsilon$ یک بی‌نهایت کوچک مثبت باشد،آنگاه $\frac{1}{\epsilon}$ یک بی‌نهایت مثبت است. در نظر بگیرید که $\epsilon$ و $\delta$ اعداد بی‌نهایت کوچک و $H$ و $K$ دو بی‌نهایت یا دو عدد نامتناهی هستند. $b$ و $c$ نیز اعداد متناهی هستند اما بی‌نهایت کوچک نیستند.

۱. اعداد حقیقی

- تنها عدد حقیقی و بی‌نهایت کوچک $0$ است.
- تمام اعداد حقیقی متناهی هستند.

۲. قرینه

- $-\epsilon$ بی‌نهایت کوچک است.
- $-b$ متناهی است اما بی‌نهایت کوچک نیست.
- $-H$ بی‌نهایت یا نامتناهی است.

۳. وارون

- اگر $\epsilon$ صفر نباشد آنگاه $\frac{1}{\epsilon}$ یک بی‌نهایت یا عدد نامتناهی است.
- $\frac{1}{b}$ یک عدد متناهی است اما بی‌نهایت کوچک نیست.
- $\frac{1}{H}$ یک بی‌نهایت کوچک است.

۴. جمع

- $\epsilon + \delta$ بی‌نهایت کوچک است.
- $b + \epsilon$ متناهی است اما بی‌نهایت کوچک نیست.
- $b + c$ متناهی است و ممکن است بی‌نهایت کوچک هم باشد.
- $H + \epsilon$ و $H + b$ هر دو بی‌نهایت یا نامتناهی هستند.

۵. ضرب

- $b \cdot \epsilon$ و $\delta \cdot \epsilon$ بی‌نهایت کوچک هستند.
- $b \cdot c$ متناهی هستند اما بی‌نهایت کوچک نیستند.
- $H \cdot b$ و $H \cdot K$ دو عدد نامتناهی یا بی‌نهایت هستند.

۶. تقسیم

- $\frac{\epsilon}{b}$ ، $\frac{\epsilon}{H}$ و $\frac{b}{H}$ همگی بی‌نهایت کوچک هستند.
- $\frac{b}{c}$ متناهی است اما بی‌نهایت کوچک نیست.
- $\frac{b}{\epsilon}$ ، $\frac{H}{\epsilon}$ و $\frac{H}{b}$ در صورتی که $\epsilon \neq 0$ بی‌نهایت یا نامتناهی هستند.

۷. ریشه اگر $\epsilon$ ، $b$ و $H$ همگی نامنفی باشند آنگاه ریشه‌های آنها به ترتیب بی‌نهایت کوچک،متناهی که بی‌نهایت کوچک نیست و بی‌نهایت هستند.

اثبات قوانین را به عهده خواننده می‌گذارم.

**چند قضیه**

۱. هر عدد ابرحقیقی بین دو بی‌نهایت کوچک خود بی‌نهایت کوچک است.

۲. هر عدد ابرحقیقی بین دو عدد متناهی خود متناهی است.

۳. هر عدد ابرحقیقی بزرگ‌تر از یک بی‌نهایت مثبت خود یک بی‌نهایت مثبت است.

۴. هر عدد ابرحقیقی کوچکتر از یک بی‌نهایت منفی خود یک بی‌نهایت منفی است.

اثبات قضایای بالا را به عهده خواننده میگذارم.
قبل از ادامه بایست با رابطه‌ای جدید که قبلا به آن اشاره شد برای دو عدد ابرحقیقی آشنا شویم:

دو عدد ابرحقیقی مانند $a$ و $b$ را بی‌نهایت نزدیک به هم می‌گوییم هرگاه فاصله‌ی آن‌ها از هم($a-b$) یک بی‌نهایت کوچک باشد.این رابطه را بصورت $a \approx b$ می‌نویسیم. و هرگاه این رابطه برقرار نباشد، روی علامت مربوطه خط می‌کشیم.رابطه‌ای که تعریف شده، یک رابطه‌ی هم ارزی است بدین معنی که این رابطه انعکاسی،متقارن و متعدی می‌باشد.

**چند قضیه**
اگر a و b به هم بی‌نهایت نزدیک باشند، آنگاه:

۱. اگر یکی از این دو بی‌نهایت کوچک باشد دیگری نیز همینطور است.

۲. اگر یکی از این دو متناهی باشد دیگری نیز همینطور است.

۳. اگر یکی از این دو بی‌نهایت یا نامتناهی باشد دیگری نیز همینطور است.

### ۳.۱.۳ اصل قسمت استاندارد

هر عدد ابرحقیقی متناهی دقیقا به یک عدد حقیقی بی‌نهایت نزدیک است.

حال قسمت استاندارد یک عدد متناهی را تعریف می‌کنیم:

فرض کنید $b$ یک عدد ابرحقیقی متناهی است.قسمت استاندارد $b$ را که با $st(b)$ مشخص می‌کنیم، یک عدد حقیقی بی‌نهایت نزدیک به $b$ است.بی‌نهایت‌ها یا اعداد نامتناهی قسمت استاندارد ندارند.

**قضایای مربوط به قسمت استاندارد**

$$st(-a) = -st(a)$$
$$st(a+b) = st(a) + st(b)$$
$$st(a-b) = st(a) - st(b)$$
$$st(ab) = st(a) \cdot st(b)$$
$$st(a^n) = st(a)^n$$
$$st(b) \neq 0 \to st(\frac{a}{b}) = \frac{st(a)}{st(b)}$$
$$a \geq 0 \to st(\sqrt[n]{a}) = \sqrt[n]{st(a)}$$
$$a \geq b \to st(a) \geq st(b)$$

برهان برای یکی از این قضایا:

$$a = st(a) + \epsilon$$
$$b = st(b) + \delta$$
$$st(a+b) = st(st(a) + \epsilon + st(b) + \delta) = st(a) + st(b)$$

## ۴ حسابان بی‌نهایت کوچک‌ها،حسابان غیراستاندارد

در این قسمت به تعریف حد و مشتق و تعدادی مثال بسنده می‌کنم.در این بخش $f$ همیشه یک تابع حقیقی تک متغیره است.حد بصورت زیر تعریف می‌شود.

> $L$ حد تابع $f(x)$ است زمانی که $x$ به $x_0$ میل می‌کند اگر هر زمان که $x$ بی‌نهایت نزدیک به $x_0$ و نامساوی با آن است، $f(x)$ نیز بی‌نهایت نزدیک به $L$ باشد.به زبان ریاضی:
>
> $$\lim_{x \to x_0} f(x) = L$$

مثلا برای بدست آوردن حد تابع زیر در نقطه ۳ اینطور عمل می‌کنیم:

$$f(x) = 2x^2$$
$$\lim_{x\to 3} f(x) = st(f(x+\epsilon)) = st(2(x+\epsilon)^2) = st(2(x^2+\epsilon^2+2x\epsilon)) = st(2x^2+2\epsilon^2+4x\epsilon) = 2x^2 = 2(3)^2$$

حال باید تعریف مشتق را حدس زده باشید:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = st(\frac{f(x+\epsilon) - f(x)}{\epsilon})$$

یک مثال:

$$\begin{aligned} sin'(x) &= st(\frac{sin(x+\epsilon) - sin(x)}{\epsilon} \\ &= st(\frac{sin(x) \cdot cos(\epsilon) - sin(\epsilon) \cdot cos(x) - sin(x)}{\epsilon}) \\ &= st(\frac{sin(x)(cos(\epsilon) - 1)}{\epsilon}) - st(\frac{sin(\epsilon)}{\epsilon} \cdot cos(x)) \\ &= 0 - cos(x) = -cos(x) \end{aligned}$$

## ۵ منابع

مطالب بخش «آنالیز غیراستاندارد چیست؟» از ویکی‌پدیای انگلیسی هستند.مگر نقل قول که از منبع شماره ۱ است.بخش «اعداد ابرحقیقی» و «حسابان بی‌نهایت کوچک‌ها» ترجمه‌ی بخش‌هایی از منبع شماره ۲ می‌باشد به همراه چند اثبات ساده از خودم. بخش «تاریخچه» از منابع شماره ۱ و ۳ جمع‌آوری شده است.


۱. `http://mathforum.org/dr.math/faq/analysis_hyperreals.html`

۲. حسابان مقدماتی با رویکرد بی‌نهایت کوچک ها، نویسنده:هوارد جرومی کیسلر از دانشگاه ویسکانسین. پیوند: `http://www.math.wisc.edu/~keisler/calc.html`

۳. تاریخچه‌ای بر حساب دیفرانسیل و انتگرال، نویسنده: کاظم مصالحه از دانشگاه شیراز


## ۶ پروانه این اثر



## ۷ تشکر از...


این فهرست، فهرست افرادیست که مستقیما در نوشتن این اثر کمکم کرده‌اند.

- دانیال مکی آبادی dm.conversation@protonmail.com